

文章编号: 1000-7598-(2007)08-1700-05

开挖边坡松动区的近似解析

肖世国, 周德培

(西南交通大学 土木工程学院, 成都 610031)

摘要: 介绍了楔形体与开挖坡体模型之间的关系, 提出了确定边坡开挖松动区范围的弹性理论分析方法。阐明在用楔形体理论分析出开挖坡体的应力场的基础上, 根据一定的坡体材料强度条件 (经过安全储备后的摩尔-库仑强度准则和单轴抗拉强度准则), 且考虑三向应力状态, 计算搜索坡体在该稳定系数下的开挖松动区, 由此计算出在坡体自上而下分步开挖过程中每一步开挖施工完成之后相应的松动区来。提出了分析计算坡体开挖松动区的主要步骤, 说明在分步开挖过程中, 计算搜索每一步开挖后的坡体松动区主要需通过讨论上一步开挖后的坡体应力场、本步开挖卸荷量及本步开挖后产生的松动区范围等问题来实现。最后, 用算例较为详细地说明了用弹性楔形体理论解析坡体开挖松动区的具体操作过程。

关键词: 开挖边坡; 松动区; 弹性理论; 楔形体; 稳定系数

中图分类号: TB 115; TU431

文献标识码: A

Approximate analysis of relaxation zone for some cutting slopes by elastic wedge body theory

XIAO Shi-guo, ZHOU De-pei

(School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: The relation between wedge body and the model of cutting slope is shown. Then analytical method of relaxation zone for cutting homogeneous slope by elastic theory is given. The stress field of cutting slope can be analyzed by elastic wedge body theory. On the basis of elastic plane-strain theory, the relaxation zone related to one safety factor can be calculated according to Mohr-Coulomb law and single tension intensity principle that are both related to the same safety factor after three-dimensional stress field of the cutting slope is got. After every cutting step is completed during excavating the whole slope, its corresponding relaxation zone can be calculated. The main calculation procedure of relaxation zone for cutting slope is given. After every cutting step is completed during excavating a slope step by step, the corresponding relaxation zone for the whole slope can be calculated by main discussing stress field of the slope after last step, additional value of stress field of the cutting slope on current step and local relaxation zone for the slope related to current step. Finally, explicit calculation procedure of analyzing relaxation zone for cutting slope by elastic wedge body theory and strength criteria of slope material is given in detail by an example.

Key words: cutting slope; relaxation zone; elastic theory; wedge body; safety factor

1 引言

自然斜坡经开挖后, 在重新建构的力学平衡体系的过程中坡体内应力会在有限范围内重新调整, 因而坡体内会产生开挖影响范围及开挖松动区^[1]。对于一般的非均质边坡, 如含有不同岩层的岩质边坡、含有不同土层的土质边坡等等, 可以用数值分析的方法分析开挖松动区, 但对于那些可以近似看成由均质材料构成的坡体, 则就可以用弹性理论来

解析其开挖松动区。为了便于在理论上深刻解析研究坡体开挖松动区, 本文就以近似的理想弹性坡体为对象, 把边坡开挖问题简化为平面应变问题^[2], 利用弹性理论并结合岩土体的强度准则, 同时根据坡体分步开挖特点, 详细讨论开挖松动区的确定方法。

2 稳定系数的定义

根据岩土材料的强度屈服准则, 坡体内某点的

失稳破坏即为该点的应力状态达到屈服状态，即满足屈服条件方程，而坡体的失稳破坏面就是处于屈服状态的点的集合。也就是说，坡体的稳定性是由坡体的应力状态和强度屈服准则决定的，这里根据坡体材料剪切强度屈服准则的特点，定义在开挖影响范围内的不同区域坡体的稳定性系数 K_s 。简单地说，就是把 K_s 定义为剪切强度屈服准则中相当抗剪强度与相当剪应力的比值^[3]。岩土材料的强度屈服准则有很多种^[4]，比较常见的主要有 Drucker-Prager 准则及 Mohr-Coulomb 准则等。下面以这两种强度准则为例，说明坡体稳定系数 K_s 的计算方法。

根据 Drucker-Prager 强度屈服准则，其屈服函数 f 可表示为^[4]

$$f = q - (\sqrt{3}k - 3\sqrt{3}\alpha p) = 0 \quad (1)$$

式中： p 、 q 分别为广义正应力、广义剪应力，如式 (2) 所示； α 、 k 分别为与岩土材料的内摩擦角 ϕ 和凝聚力 c 有关的系数，如式 (3) 所示。

$$\left. \begin{aligned} p &= (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 ; \\ q &= \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]/2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \tan \phi / \sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi} ; \\ k &= 3c / \sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中： σ_1 、 σ_2 、 σ_3 为一点的 3 个主应力（拉正压负）； q 为相当剪应力，而 $\sqrt{3}k - 3\sqrt{3}\alpha p$ 为相当抗剪强度，此时坡体稳定系数 K_s 为

$$K_s = (\sqrt{3}k - 3\sqrt{3}\alpha p) / q \quad (4)$$

根据 Mohr-Coulomb 强度屈服准则，其屈服函数 f 可表示为^[4]

$$f = [(\sigma_1 - \sigma_3)/2] - [c \cos \phi - 0.5(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi] = 0 \quad (5)$$

式中： $[(\sigma_1 - \sigma_3)/2]$ 为相当剪应力； $[c \cos \phi - 0.5(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi]$ 为相当抗剪强度。此时，坡体稳定系数 K_s 为

$$K_s = [c \cos \phi - 0.5(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi] / [(\sigma_1 - \sigma_3)/2] \quad (6)$$

从另一角度来说，式 (4)、式 (6) 亦分别表示引入安全系数而进行安全储备后的 Drucker-Prager 强度屈服准则和 Mohr-Coulomb 强度屈服准则。

在实际工程中所确定的开挖坡体松动区，其内

边界实际上就是在一定稳定系数（根据具体工程的重要性等情况而确定）下坡体开挖时产生的潜在最危险滑面，而松动区范围内的坡体就是开挖造成的潜在最危险滑体，因而判断一定稳定系数下开挖松动区的过程实际上也是搜索该稳定系数下开挖坡体潜在滑面的过程^[3]。所以，找到松动区范围后，同时就确定了在该稳定系数下坡体开挖后的潜在最危险滑面，亦即该稳定系数就为此潜在最危险滑面对应的坡体安全系数，便可以对开挖坡体的稳定性做出评价。从实际物理意义的角度出发，可以将坡体横向一定范围内从上到下稳定系数相同的点所组成的曲面定义为该稳定系数所对应的潜在滑面。为了简化分析，这里就把每个潜在滑面相应的稳定系数近似认为是该潜在滑面对应的潜在滑体的稳定系数，这样就可以在前述关于点的稳定系数的基础上，在确定松动区范围的同时也近似确定出该松动区的稳定系数，作为对该开挖坡体稳定性评价的简单参考。

3 弹性坡体的分析模型

3.1 弹性楔形体理论

楔形体一般的平面力学分析模型如图 1(a) 所示，在楔体表面（边界）作用着荷载 F ，楔体体内作用有体力 P 、 β 为 x 坐标轴与左边界的夹角； α 为 x 坐标轴与右边界的夹角。在荷载作用下的楔形体，其应力场的弹性理论解是可以得到的，详见文 [5]。

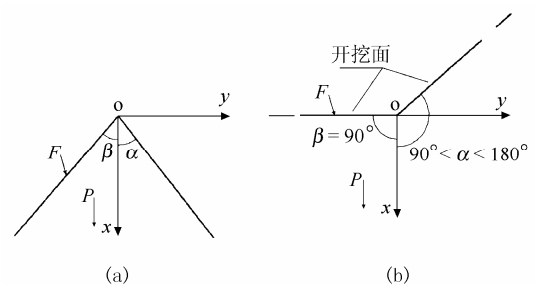


图 1 楔形体模型与开挖坡体模型的关系

Fig.1 Relation between wedge body model and cutting slope model

3.2 开挖坡体与楔形体间的关系

对于图 1(a) 所示的楔形体模型，若取特例 $\beta = 90^\circ$ ， $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ，则变为图 1(b) 所示的力学模型，该种模型就与坡体在由上而下分级开挖过程中每级坡开挖完成后的情况极为相似（开挖坡体完全包括在楔形体之内，并构成楔形体的主体部分），这时作用于此坡体平面应变问题分析模型上的荷载

主要为: 坡面开挖卸荷而形成的面力、重力等。坡体开挖后, 在这两种主要的荷载作用下坡体中产生了新的力学状态, 即形成新的应力场与位移场。所以, 对于弹性坡体的开挖作用可以近似采用楔形体模型来处理其力学分析问题, 可以得到具体的解析解。根据叠加原理, 在坡体的分步开挖过程中, 每一步开挖施工完成后坡体的应力场可由式(7)求得, 这里不考虑坡体的原始构造应力场, 只考虑自重应力场, 以简化分析计算。

$$\sigma_{ij}^k = \Delta\sigma_{ij}^k + \sigma_{ij}^{k-1} \quad (7)$$

式中: σ_{ij}^k 为第 k 步开挖施工完成后坡体的应力场; $\Delta\sigma_{ij}^k$ 第 k 步开挖施工完成后坡体的应力场增量; 若采用直角坐标表示, i 与 j 均可取为相应的 x 、 y , 若用极坐标表示, 则 i 与 j 均可取为相应的 r 、 θ , $k=1, 2, \dots, \xi$, ξ 为坡体总的开挖步数; σ_{ij}^0 为坡体原始自重应力场。

根据弹性楔形体理论可以解析出近似理想的弹性坡体的开挖应力场, 其计算理论详见文[6]。

4 开挖松动区的解析方法

开挖坡体应力场的分析过程^[6]可以看出, 应力场的表达式十分复杂, 若根据此应力解而利用物理方程与几何方程再推导出位移解, 其推导过程会非常麻烦, 为简化分析过程, 这里采用应力分析的方法来解析开挖坡体的松动区。由前述关于坡体松动区的概念可知, 坡体松动区的内边界实际上可以看成在经过一定安全储备 (相当抗剪强度除以稳定系数 K_s) 后坡体中处于临界破坏状态的点的集合, 因此可以利用强度条件来判断坡体开挖松动区。岩土材料的强度准则有许多种^[4], 这里主要采用 Mohr-Coulomb 强度准则以简化分析。由前面叙述可知, 在平面应变状态下三向应力都为二维坐标的函数, 在确定了一点的 x 、 y 向应力之后, 其 z 向应力也可得出, 所以在使用强度准则时要考虑三向应力状态的情况。设坡体内各点的 3 个主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 大小关系为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, 符号规定为拉正压负 (下同), 则 Mohr-Coulomb 强度准则经过安全储备后的表达如式 (8) 所示。由于岩土材料特殊的物理力学特性, 使得其抗拉强度极低, 有时甚至为 0, 因此还应该考虑其抗拉强度准则作为另一个强度控制条件。为便于简化分析, 这里就采用单轴抗拉强度准则作为抗拉强度控制条件, 其相应考虑安全储备后的表达如式 (11) 所示。在得到开挖坡体的应力场之后, 就可以用经过安全储备后的 Mohr-

Coulomb 强度准则和单轴抗拉强度准则来解析坡体开挖松动区。

$$(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = [c \cos \phi - (\sigma_1 + \sigma_3)/2 \sin \phi]/K_s \quad (8)$$

式中 c 、 ϕ 分别为坡体材料的凝聚力和内摩擦角。在三向应力状态下的主应力 σ_1 、 σ_3 由式 (9) 确定, 取其解的最大值作为 σ_1 , 最小值为 σ_3 。

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (9)$$

式中系数 I_1 、 I_2 、 I_3 按式 (10) 计算, 其中 μ 为坡体材料的泊松比。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= (1 + \mu)(\sigma_x + \sigma_y); \\ I_2 &= \mu(\sigma_x + \sigma_y)^2 + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2; \\ I_3 &= \mu(\sigma_x + \sigma_y)(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式 (10) 是用直角坐标表示的情况, 若用极坐标表示, 则只需将其中的应力脚标 x 、 y 对应换成 r 、 θ 即可。

$$\sigma_1 - R_t/K_s = 0 \quad (11)$$

式中 R_t 为坡体材料的单轴抗拉强度。

对于弹性坡体, 如图 2 所示, 在从上而下分步开挖的过程中, 每一级坡开挖施工完成后坡体内产生的松动区的分析计算过程如下:

①合理简化坡体力学分析模型, 将坡体力学分析问题简化为平面应变问题, 并选择具有代表性的横断面建立分析模型。

②根据每一步开挖施工完成后的计算结果, 分析计算上一步开挖后在下一步拟开挖面 (包括斜面段和水平段) 上的应力分布状况, 为了简化分析计算过程, 可依据该应力分布情况计算法向应力和切向应力的几何平均值, 并反向施加于下一步开挖坡面上, 以近似简化作为此步开挖后卸除的荷载, 进而可以得到每一步开挖施工完成后坡体内的应力场, 具体计算方法详见文[6]。

③根据式 (8) 所示的安全储备后的 Mohr-Coulomb 强度准则和式 (11) 所示的安全储备后的单轴抗拉强度准则, 对各个计算区内不同点判断其强度条件, 把达到破坏临界状态 (使这两式成立) 各点连接起来, 即形成每一步开挖完成后坡体松动区的内边界, 它与开挖面之间的部分即为本步开挖完成后坡体的开挖松动区。

④整理各开挖步完成后的相应计算结果, 直到坡体全部开挖施工完成, 计算过程结束。

在每一开挖步完成后，通常只讨论该步对应的坡高及其上、下一个坡高的范围内坡体松动区，然后，再将其同上一步开挖施工完成后得到的坡体松动区取并集，即为此步开挖施工完成后整个坡体产生的松动区，于是可以简化计算工作，减少工作量，同时，根据坡体开挖后上下力学结构的特点，即每个开挖步完成后，对其上面坡体的力学影响作用较大，对其下面坡体的力学影响作用较小，通过电算整个上述开挖松动区分析过程。

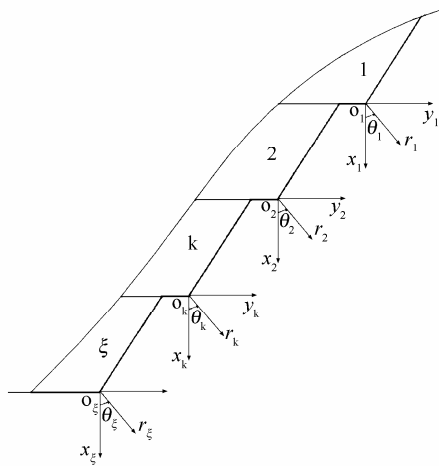


图 2 弹性坡体分步开挖示意图

Fig.2 Sketch of elastic slope being excavated step by step

5 算例分析

某岩土边坡工程拟分两步开挖，其典型横断面示意图如图 3 所示。坡顶面线与水平向夹角 δ 约为 20° 。上层坡体材料重度 $\gamma_1 = 20 \text{ kN/m}^3$ ，凝聚力 $c_1 = 150 \text{ kPa}$ ，内摩擦角 $\phi_1 = 25^\circ$ ；下层坡体材料重度 $\gamma_2 = 21 \text{ kN/m}^3$ ，凝聚力 $c_2 = 200 \text{ kPa}$ ，内摩擦角 $\phi_2 = 30^\circ$ ；上下两层坡体材料的泊松比 μ 都近似为 0.35，坡体材料的允许单轴抗拉强度 $R_t = 2 \text{ kPa}$ 。第一步开挖高度 $H_1 = 8 \text{ m}$ ，坡率 $m_1 = 1:1$ ，开挖台阶宽度 $b = 2 \text{ m}$ ；第二步开挖高度 $H_2 = 8 \text{ m}$ ，坡率 $m_2 = 1:0.75$ 。上级坡脚距原始坡面水平距离 o_1B 为 5.8 m ，下级坡脚距原始坡面水平距离 o_2C 为 3.9 m 。坡体设计稳定系数取 $K_s = 2.0$ 。

下面按坡体材料近似为弹性材料来分析计算坡体开挖松动区。为便于简化计算，这里将两个开挖步所对应的原始坡面线均近似成直线段。

(1) 第一步开挖。侧压力系数 $\lambda = \mu / (1 - \mu) = 0.35 / (1 - 0.35) \approx 0.538$ ，根据文[6]计算得到本步开挖施工完成后相应各区域的坡体应力场（计算结

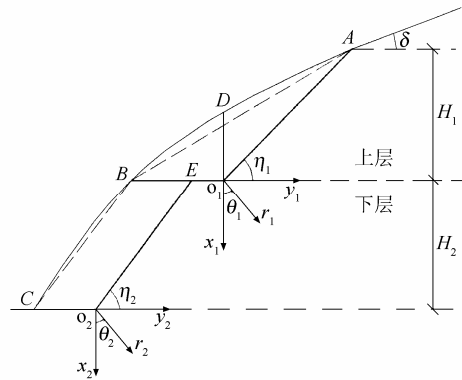


图 3 算例坡体横断面示意图

Fig.3 Cross-section sketch of an example

果参见文[6]）。根据式 (8) 及式 (11)，在坡体上层和下层区域安全储备后的 Mohr-Coulomb 强度条件方程分别如式 (12) 与式 (13) 所示，而整个坡体的安全储备后的单轴抗拉强度条件方程则如式 (14) 所示。

$$(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = 67.973 - 0.211(\sigma_1 + \sigma_3)/2 \quad (12)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = 86.603 - 0.25(\sigma_1 + \sigma_3)/2 \quad (13)$$

$$\sigma_1 - 1 = 0 \quad (14)$$

根据本步开挖施工完成后坡体内的应力场与经过安全储备后的坡体材料强度条件可以计算分析出此时坡体的松动区范围，其结果如图 4 所示，其内边界主要点在 $r_1 o_1 \theta_1$ 极坐标系中 (r_1 单位为 m) 的坐标为： $A_1(15.94, 127.5^\circ)$ 、 $A_2(11.3, 125.5^\circ)$ 、 $A_3(5.8, 123.5^\circ)$ 、 $A_4(1.76, 90^\circ)$ 、 $A_5(1.10, 45^\circ)$ 、 $A_6(1.56, 0^\circ)$ 、 $A_7(7.47, -78^\circ)$ 。

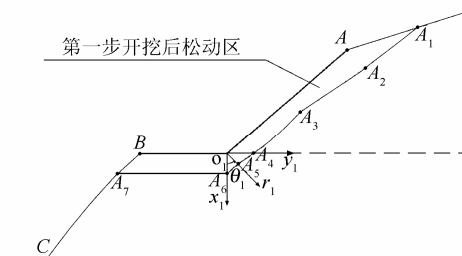


图 4 第一步开挖完成后坡体松动区范围

Fig.4 Relaxation zone of the cutting slope after the first excavation step

(2) 第二步开挖。同理，得到本步开挖施工完成后相应各区域的坡体应力场（计算结果见文[6]）后，再根据式(12)~(14)所示的安全储备后的坡体

材料强度条件可以计算分析出此时坡体的松动区范围,其结果如图 5 所示,其内边界主要点在 r_2 o_2 θ_2 极坐标系中(r_2 单位为 m)的坐标为: $A_6(10, 129.5^\circ)$ 、 $A_7'(6.96, 116^\circ)$ 、 $A_8(3.63, 90^\circ)$ 、 $A_9(2.07, 45^\circ)$ 、 $A_{10}(2.76, 0^\circ)$ 、 $A_{11}(3.44, -45^\circ)$ 、 $A_{12}(6.9, -90^\circ)$, 便可得到坡体在两步开挖完成后的整个松动区。

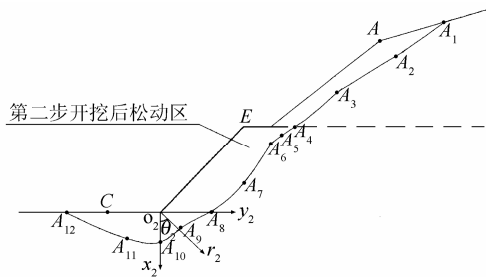


图 5 第二步开挖完成后坡体松动区范围

Fig.5 Relaxation zone of the cutting slope after the second excavation step

由上述计算结果可见,在第一步开挖完成后,对其下面坡体的影响作用较小,松动区范围相对较小;在第二步开挖完成后,对其上面坡体的影响比对其下面坡体影响的大,松动区范围比第一步开挖后有所增大,这与实际坡体开挖工程中的开挖影响作用规律是一致的。同时,由此分析结果可得,在第一 1 步开挖完成后,坡体应进行适当的浅层加固与防护;在第二步开挖完成后,坡体应进行一定程度的支挡加固处理。

6 结 语

本文介绍了楔形体与开挖坡体模型之间的关系,提出了确定边坡开挖松动区范围的弹性理论分析方法。对于近似理想的弹性坡体,可以将坡体开挖问题简化为平面应变问题,用楔形体理论分析开挖坡体的应力场,并根据一定的坡体材料强度条件(经过安全储备后的 Mohr-Coulomb 强度准则和单轴抗拉强度准则)且考虑三向应力状态计算搜索坡体在该稳定系数下的开挖松动区,由此在坡体自上

而下分步开挖过程中每一步开挖施工完成之后相应的松动区都可以计算出来。在分步开挖过程中,计算搜索每一步开挖后的坡体松动区主要需通过讨论上一步开挖后的坡体应力场、本步开挖卸荷量及本步开挖后产生的松动区范围等问题来实现。需要说明的是,由于本文讨论的对象是近似理想的弹性坡体,所以在实际工程中,对于那些可近似看成由均质材料构成的坡体,可以考虑用本文的方法解析坡体开挖松动区。本文的方法可以为该类坡体开挖松动区的确定提供参考,有助于在理论上加深对开挖边坡松动区的认识和理解。

参 考 文 献

- [1] 肖世国,周德培. 开挖边坡松弛区的确定与数值分析方法[J]. 西南交通大学学报, 2003, 38(3): 318—322.
XIAO Shi-guo, ZHOU De-pei. Determination and numerical analysis method of relaxation region for cutting slopes[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2003, 38(3): 318—322.
- [2] 谢贻权,林钟祥,丁皓江. 弹性力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1988. 93—219.
- [3] 肖世国. 岩石高边坡开挖松弛区及加固支挡结构研究[博士学位论文 D]. 成都: 西南交通大学, 2003. 32—62.
- [4] 张学言. 岩土塑性力学[M]. 北京: 人民交通出版社, 1993. 115—119.
- [5] 高家美,顿志林. 楔形体应力理论及其在工程中的应用[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 2001: 57—249.
- [6] 肖世国,周德培. 开挖边坡应力场的近似解析解[J]. 水利学报, 2005, 36(1): 16—21.
XIAO Shi-guo, ZHOU De-pei. Approximate analytical solution for stress field of cutting slopes[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2005, 36(1): 16—21.